矩阵与运算

林胤榜

同济大学数学科学学院

主要内容

回顾：线性方程组和矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

注意: 未知数个数不一定等于方程个数.

系数矩阵: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, 未知数矩阵 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

常数矩阵 $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. 上述方程可简写为 $Ax = b$.

线性方程组

定义

若 $b = 0 \in \mathbb{R}^m$, 即 $b_1, \dots, b_m$ 均为 0, 则上述方程称为 n 元齐次线性方程组; 否则, 称为 n 元非齐次线性方程组. 若 $b = 0$, 则 $A0 = 0$, 即 0 是线性方程组的解, 称为它的零解.

线性方程组

定义

若 $b = 0 \in \mathbb{R}^m$, 即 $b_1, \ldots, b_m$ 均为 0, 则上述方程称为 n 元齐次线性方程组; 否则, 称为 n 元非齐次线性方程组. 若 $b = 0$, 则 $A0 = 0$, 即 0 是线性方程组的解, 称为它的零解.

它不一定有非零解.

线性方程组

定义

若 $b = 0 \in \mathbb{R}^m$, 即 $b_1, \ldots, b_m$ 均为 0, 则上述方程称为 n 元齐次线性方程组; 否则, 称为 n 元非齐次线性方程组. 若 $b = 0$, 则 $A0 = 0$, 即 0 是线性方程组的解, 称为它的零解.

它不一定有非零解.
基本问题:

1. 是否有解 (主要对非齐次)?
2. 存在时, 解是否唯一?
3. 若有多个解, 如何求得?

定义

若两矩阵有相同的行数和相同的列数, 称它们为**同型矩阵**.
若矩阵的所有项均为 0, 则称它为**零矩阵**, 记为 O.

定义

若两矩阵有相同的行数和相同的列数, 称它们为**同型矩阵**.
若矩阵的所有项均为 0, 则称它为**零矩阵**, 记为 O.

注意: 不同型的零矩阵是不一样的.

定义

若两矩阵有相同的行数和相同的列数, 称它们为同型矩阵.
若矩阵的所有项均为 0, 则称它为零矩阵, 记为 O.

注意: 不同型的零矩阵是不一样的.

定义 (对角阵)

形如

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

的矩阵称为对角矩阵, 其对角线上的元素有可能不为 0, 其余项均为 0. Λ 也记作 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. (diagonal)

定义 (单位阵)

$$E_n = E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

称为 n 阶单位阵. 它的元

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

我们将会看到, $AE = A = EA$ (假设它们可以相乘).

定义 (同型矩阵相加)

给定两同型矩阵 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A+B$ 表示第 (i,j) 项为 $a_{ij}+b_{ij}$ 的矩阵, 即

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

注意: 不同型矩阵不能相加.

定义 (同型矩阵相加)

给定两同型矩阵 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A+B$ 表示第 (i,j) 项为 $a_{ij}+b_{ij}$ 的矩阵, 即

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

注意: 不同型矩阵不能相加.

定义 (数乘)

$A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,$k\in\mathbb{R}$, 定义数与矩阵相乘为

$$kA=(ka_{ij}).$$

定理

$(M_{m\times n}, +, \cdot)$ 构成线性空间.

定理

$(M_{m\times n}, +, \cdot)$ 构成线性空间.

定理包含的内容:

- "+" $\begin{cases} (i) & \exists O, \\ (ii) & (A+B)+C = A+(B+C), \\ (iii) & \exists -A, \\ (iv) & A+B = B+A. \end{cases}$
- "·" $\begin{cases} (v) & 1\cdot A = A, \\ (vi) & \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A. \end{cases}$
- "·" 与 "+" $\begin{cases} (vii) & (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A, \\ (viii) & \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B. \end{cases}$

定义 (矩阵相乘)

给定 $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}$, $B=(b_{rs})\in M_{n\times k}$. 定义 $AB\in M_{m\times k}$: AB 的 (i,s) 项是

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{js}.$$

左乘一个矩阵

矩阵 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 给出线性映射

$$L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$
$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \mapsto AZ.$$

例子 (对角矩阵)

给定 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 则线性映射

$$L_\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

对每个坐标向量作伸缩:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

例子 (单位矩阵)

$E = E_n = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$, 则

$$\begin{aligned} L_E \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n, \\ X &\mapsto EX = X. \end{aligned}$$

所以称它为单位矩阵.

平面上的旋转

例子

令

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

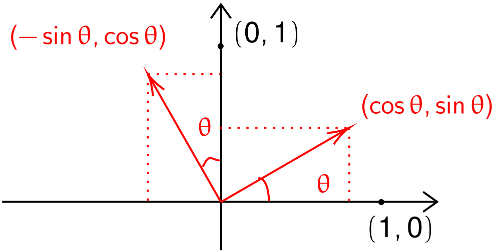
则

$$\begin{aligned} L_A\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

所以, L_A 将平面上的向量逆时针旋转 θ.



例子

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

求 AB 和 BA.

例子

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

求 AB 和 BA.

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -3 & -5 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意: $AB \neq BA$.

定义

若方阵 A 和 B 满足 $AB = BA$, 则称 A 和 B 是可交换的.

注意:

1. A 和 B 均不为 0, 但有可能 $AB = 0$. 换句话说,

$$AB = 0 \nRightarrow A = 0 \text{ 或} B = 0.$$

2. $A(X - Y) = 0$ 且 $A \neq 0 \nRightarrow X = Y$.

矩阵乘法的基本性质

A, B, C 是矩阵, 假设下列运算均可行.

1. (结合律) $(AB)C = A(BC)$.

矩阵乘法的基本性质

A, B, C 是矩阵, 假设下列运算均可行.

1. (结合律) $(AB)C = A(BC)$.
2. $\lambda(AB) = (\lambda A)B$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

矩阵乘法的基本性质

A, B, C 是矩阵, 假设下列运算均可行.

1. (结合律) $(AB)C = A(BC)$.
2. $\lambda(AB) = (\lambda A)B$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. (分配率) $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$.

矩阵乘法的基本性质

A, B, C 是矩阵, 假设下列运算均可行.

1. (结合律) $(AB)C = A(BC)$.
2. $\lambda(AB) = (\lambda A)B$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. (分配率) $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$.
4. E_m 和 E_n 是单位阵, $A \in M_{m\times n}$, 则

$$E_m A = A \quad 和 \quad AE_n = A.$$

矩阵乘法的基本性质

A, B, C 是矩阵, 假设下列运算均可行.

1. (结合律) $(AB)C = A(BC)$.
2. $\lambda(AB) = (\lambda A)B$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. (分配率) $A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)A = BA + CA$.
4. E_m 和 E_n 是单位阵, $A \in M_{m\times n}$, 则

$$E_m A = A \quad 和 \quad AE_n = A.$$

5. λE_m 称为纯量阵.

$$\lambda E_m A = \lambda A = A(\lambda E_n).$$

纯量阵可与任何同阶方阵交换.

由于有结合律, 若干个矩阵相乘, 可以不加括号. 比如,

$$A(BC)D = A((BC)D) = A(B(CD)) = (AB)(CD).$$

矩阵相乘与线性映射的复合

矩阵 $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times k}$, $AB \in M_{m\times k}$ 分别诱导出以下线性映射:

$$\begin{aligned} L_A &\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \\ L_B &\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, \\ L_{AB} &\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

事实上, (由于矩阵乘法的结合律),

$$L_{AB} = L_A \circ L_B.$$

令 $X \in \mathbb{R}^k$ 为列向量, 则 $L_{AB}(X) = ABX$. 另一方面,

$$(L_A \circ L_B)(X) = L_A(L_B(X)) = L_A(BX) = ABX.$$

定义 (矩阵的幂)

$A \in M_{n\times n}$,

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{k\text{个}A}.$$

定义 (矩阵的幂)

$A \in M_{n\times n}$,

$$A^k = \underbrace{A\cdot A\cdot A\cdots A}_{k\text{个}A}.$$

注意: 假设 $A, B \in M_{n\times n}$, 一般地, $(AB)^k \neq A^k B^k$. 若 A, B 可交换, 则 $(AB)^k = A^k B^k$.

定义 (矩阵的幂)

$A \in M_{n\times n}$,

$$A^k = \underbrace{A\cdot A\cdot A\cdots A}_{k\text{个}A}.$$

注意: 假设 $A, B \in M_{n\times n}$, 一般地, $(AB)^k \neq A^k B^k$. 若 A, B 可交换, 则 $(AB)^k = A^k B^k$.

定义 (矩阵的转置)

$A = (a_{ij})_{m\times n}$, A 的转置A^T 的 (i,j) 项定义为 a_{ji}, 即

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

命题 (转置的性质)

- a $(A^T)^T = A$.
- b $(A+B)^T = A^T + B^T$.
- c $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
- d $(AB)^T = B^T A^T$.

证明.

a-c 比较容易得到. 下证 d. 记 $A = (a_{ij}), B = (b_{rs})$. AB 的 (i,s) 元为 $\sum\limits_j a_{ij} b_{js}$, 则 $(AB)^T$ 的 (i,s) 元为 $\sum\limits_j a_{sj} b_{ji}$. 另外, $B^T A^T$ 的 (i,s) 元为

$$\sum_j (B^T)_{ij} (A^T)_{js} = \sum_j b_{ji} a_{sj} = ((AB)^T)_{(i,s)}.$$

$\square$

定义 (对称阵)

若 $A = A^T$(此时 A 必须为方阵), 则称 A 为对称阵. (以对角线为轴对称)

例子

假设

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

满足 $X^T X = 1$(数量), E 为单位阵, $H = E - 2XX^T$ (n 阶方阵). 证明 H 是对称阵, 且 $HH^T = E$.

例子

假设

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

满足 $X^TX = 1$(数量), E 为单位阵, $H = E - 2XX^T$ (n 阶方阵).
证明 H 是对称阵, 且 $HH^T = E$.

证明:

$$\begin{aligned} H^T &= E^T - 2(XX^T)^T = E - 2(X^T)^TX^T = E - 2XX^T = H, \\ HH^T &= (E - 2XX^T)(E - 2XX^T) \\ &= E^2 - 2XX^TE - E \cdot 2XX^T + 4X(X^TX)X^T \\ &= E - 4XX^T + 4XX^T = E. \end{aligned}$$

方阵的行列式

定理

方阵可逆当且仅当它的行列式非零.

方阵的行列式

定理

方阵可逆当且仅当它的行列式非零.

命题

假设 A 为 n 阶方阵. 则

a. $|A^T| = |A|$,
b. $|\lambda A| = \lambda^n |A|$,
c. $|AB| = |A||B|$.

推论

$|AB| = |BA|$.